e-ISSN: 2721-5539
e-journal.unmuhkupang.ac.id/index.php/mega
mega.jpmat@unmuhkupang.ac.id
Volume 3, (1), 2022

KAJIAN KEKONVERGENAN LEMAH DI RUANG HILBERT

Abubakar Sidiq M.Hasbi
MTs Plus Nurul Iman,

goeshiddiq1992@gmail.com

Abstract

We have the sequence $\{x_n\} \subset X$, where X a norm space. We have a dual space $X' = L_c(X, \Re)$ too is the collection of linier and continous functional from norm space X into riil number system $\Re$. If for all the sequence $\{x_n\} \subset X$ convergent to $x \in X$ and $f \in X'$ then $\{f(x_n)\}$ convergent to $f(x)$. The converse of this implication is not applicable . This study aims to explain the properties that apply to the ranks of the weak convergent and explain the relationship between the strong convergent sequence and the weak convergent sequence. From several reference sources then through the review process obtained weak nature of singularity limit sequence $\{x_n\}$ and relationship between the strong convergent sequence and the weak convergent sequence that if the sequence $\{x_n\}$ is strong convergent therefore the sequence it weak convergent.

Keywords: *Sequence, Sequence of Weak Convergent, Dual Space*

Abstrak

Diketahui barisan $\{x_n\} \subset X$, dengan X suatu ruang bernorma. Diketahui pula suatu ruang dual $X' = L_c(X, \Re)$ yang merupakan koleksi fungsional linear dan kontinu dari ruang bernorma X ke sistem bilangan real $\Re$. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen ke $x \in X$ dan diambil sebarang $f \in X'$ maka $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(x)$. Konvers dari implikasi ini tidak berlaku. Kajian ini bertujuan untuk menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada barisan konvergen lemah serta menjelaskan hubungan antara barisan konvergen kuat dengan barisan konvergen lemah. Dari beberapa sumber referensi maka melalui proses kajian diperoleh sifat ketunggalan limit lemah barisan $\{x_n\}$ dan hubungan antara barisan konvergen kuat dengan barisan konvergen lemah yaitu jika barisan $\{x_n\}$ konvergen kuat mengakhibatkan barisan tersebut konvergen lemah.

Kata Kunci: Barisan, Barisan Konvergen Lemah, Ruang Dual.

PENDAHULUAN

Kajian ruang abstrak dalam matematika analisis dapat dimaknai sebagai suatu proses pengabstraksian setiap elemen–elemen yang berada di dalam suatu himpunan tak kosong dan memenuhi aksioma–aksioma tertentu. Beberapa konsep ruang abstrak yang dipelajari antara lain ruang linear, ruang Banach, ruang bernorma, ruang pre-Hilbert dan ruang Hilbert.

Ruang linear adalah ruang vektor atas lapangan sistem bilangan real atau sistem bilangan kompleks. Suatu ruang linear dengan lapangan sistem bilangan real yang dilengkapi oleh suatu norma $\|\cdot\|$ dan memenuhi aksioma - aksioma tertentu dinamakan ruang bernorma. Jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang bernorma tersebut konvergen, maka ruang bernorma tersebut dikatakan lengkap dan disebut dengan ruang Banach. Ruang linear yang dilengkapi oleh suatu produk skalar dinamakan ruang pre-Hilbert. Ruang pre-Hilbert yang lengkap disebut ruang Hilbert.

Dalam ruang pre-Hilbert didefinisikan norma sebagai berikut:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa setiap konsep, definisi, teorema dan lemma yang berlaku pada ruang bernorma, sifat–sifat tersebut juga berlaku pada ruang pre-Hilbert yang salah satunya adalah sifat kekonvergenan barisan pada ruang bernorma. Konsep kekonvergenan barisan yang sudah dikenal pada ruang bernorma selama ini adalah **kekonvergenan kuat.**

Selanjutnya misalkan diberikan suatu ruang dual X'. Jika untuk setiap barisan yang konvergen ke suatu titik dan diambil sebarang fungsi pada ruang dual tersebut maka diperoleh barisan fungsi yang konvergen pula. Konvers dari implikasi ini belum tentu terjadi, dimana jika barisan fungsi yang konvergen dan untuk setiap fungsi pada ruang dual X' barisannya belum tentu konvergen.

Berdasarkan latar belakang di atas penulis tertarik untuk mengkaji konsep kekonvergenan barisan yang baru dibentuk ini. Yaitu menjelaskan sifat–sifat apakah yang berlaku pada barisan konvergen lemah. Menjelaskan hubungan antara barisan yang konvergen kuat dengan barisan yang konvergen lemah. Oleh karena itu, penulis menyusun tugas akhir ini dengan judul **“Kajian Kekonvergenan Lemah di Ruang Hilbert”.**

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka. Dari beberapa sumber referensi dibuat suatu kajian khusus mengenai kekonvergenan lemah di ruang Hilbert. Kajian ini merupakan penelitian yang bersifat murni atau penelitian dasar.

Adapun langkah-langkah kajian kekonvergenan lemah di ruang Hilbert akan didahului dengan memaparkan definisi dari konsep dasar matematika yaitu konsep ruang vektor, ruang metrik, Ruang Banach, ruang pre-Hilbert serta konsep-konsep matematika lainnya yang mendukungnya. Selanjutnya dengan konsep kekonvergen kuat di ruang bernorma dikonstruksi konsep kekonvergenan lemah dan hubungan antara barisan konvergen kuat dengan barisan konvergen lemah.

Adapun hasil yang ingin dicapai dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Dapat menjelaskan sifat–sifat apakah yang berlaku pada barisan yang konvergen lemah.
2. Dapat menjelaskan hubungan antara barisan konvergen kuat dengan barisan konvergen lemah

HASIL DAN PEMBAHASAN

Setiap ruang pre-Hilbert adalah ruang bernorma. Hal ini diperlengkap oleh kekonvergenan suatu barisan, namakan barisan yang didefinisikan oleh norma $\|.\|$. Kekonvergenan ini dinamakan dengan kekonvergenan kuat (strong convergence) yang akan disajikan melalui definisi berikut.

Definisi 4.1.1 (kekonvergenan kuat/strong convergence)

Sebuah barisan $\{x_n\} \subset X$ *pada ruang bernorma* X *dikatakan konvergen kuat jika ada* $x \in X$ *sehingga untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *ada* $n_0 \in \mathbb{N}$ *dengan sifat untuk setiap* $n \geq n_0$

maka $\|x_n - x\| < \varepsilon$. *Barisan* $\{x_n\} \subset X$ *yang konvergen kuat ke* $x \in X$ *dinotasikan dengan* $x_n \to x$ *atau* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *atau* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Contoh 4.1.2

Tunjukkan bahwa barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\} \subset X$ konvergen ke nol dan gambarkan grafik satu dimensinya.

Bukti

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Menurut sifat Archimedes ada bilangan asli n_0 sehingga $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $\left\|\frac{1}{n} - 0\right\| = \left\|\frac{1}{n}\right\| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ Karena ε sebarang maka terbukti barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\} \subset X$ konvergen ke nol.

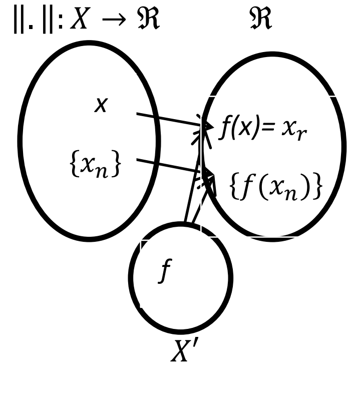
Selanjutnya untuk mendefinisikan konsep kekonvergenan lemah suatu barisan dibutuhkan beberapa teori pendukung di antaranya ruang dual dari ruang bernorma X yaitu X' dan konsep fungsi linear kontinu serta teori-teori pendukung lainnya.

Definisis 4.1.3 (kekonvergenan lemah/weak convergence)

Diberikan X *dan* X' *masing-masingnya menyatakan ruang bernorma dan ruang dual. Barisan* $\{x_n\} \subset X$ *dikatakan konvergen lemah pada* X *jika terdapat* $x \in X$ *sehingga untuk setiap* $f \in X'$ *berlaku* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. *Barisan* $\{x_n\} \subset X$ *yang konvergen lemah ke* $x \in X$ *dinotasikan dengan* $x_n \xrightarrow{w} x$ *atau* $x_n \longrightarrow x$ *lemah atau* $w - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *atau* $\{x_n - x\} \xrightarrow{w} 0$. *Namun pada pembahasan ini penulis menggunakan notasi pertama dan* x *disebut limit lemah dari barisan* $\{x_n\} \subset X$.

Notasi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ berarti barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen lemah jika barisan bilangan $\{f(x_n)\}$ konvergen ke $f(x)$. Karena $\{f(x_n)\} \subset \Re$ maka ada $x_r \in \Re$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - x_r| < \varepsilon$. Jadi ada $x \in X$ sehingga $f(x) = x_r$. Oleh karena itu jika barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen lemah maka ada $x \in X$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Jadi barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen lemah jika dan hanya jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $f \in X'$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

Skema kekonvergenan lemah barisan $\{x_n\} \subset X$ dapat dilihat pada gambar berikut



4.1 Sifat-Sifat Barisan Konvergen Lemah

Pada bagian ini akan dibahas beberapa sifat dari barisan yang konvergen lemah, di antaranya sifat ketunggalan dan kelinearan.

Teorema 4.1.4 (ketunggalan limit lemah)

Jika suatu barisan $\{x_n\} \subset X$ *konvergen lemah maka limit lemahnya tunggal.*

Bukti

Misalkan $x_n \xrightarrow{w} x$ dan $x_n \xrightarrow{w} y$. Untuk membuktikan ketunggalan limit lemahnya maka cukup dibuktikan $x = y$. Berdasarkan definisi untuk x dan y tersebut di atas berlaku :

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, untuk setiap $f \in X'$ dan

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$, untuk setiap $f \in X'$.

Karena barisan $\{f(x_n)\} \subset \Re$ maka :

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = f(y)$, akhibatnya

$f(x) = f(y)$

Karena f linear maka diperoleh

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0 = f(0)$$

$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, untuk setiap $f \in X'$

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x-y) = f(0)$

$x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Karena f sebarang maka teorema terbukti . ■

Selanjutnya dua buah teorema berikut menunjukkan bahwa sifat kelinearan yang berlaku pada barisan konvergen kuat berlaku pula pada barisan konvergen lemah. Selain itu sifat lain yang juga berlaku pada barisan konvergen lemah yaitu setiap subbarisan dari barisan yang konvergen lemah adalah juga konvergen lemah ke nilai yang sama.

Teorema 4.1.5

Misalkan $\{x_n\}$ *dan* $\{y_n\}$ *dua buah barisan yang terdapat pada ruang bernorma* X *. Jika terdapat* x *dan* y *sehingga* $x_n \xrightarrow{w} x$ *dan* $y_n \xrightarrow{w} y$ *maka untuk sebarang skalar* α, β *berlaku* $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{w} \alpha x + \beta y$.

Bukti

Diketahui $x_n \xrightarrow{w} x$ *dan* $y_n \xrightarrow{w} y$. *Berdasarkan definisi maka untuk setiap* $f \in X'$ *diperoleh*

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ *dan*

$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$

Selanjutnya untuk sebarang α, β di atas dan dengan sifat kelinearan dari f maka diperoleh

$\lim_{n\to\infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha f(x_n) + \beta f(y)$.

Karena $\{f(x_n)\}$ dan $\{f(y_n)\}$ masing-masingnya barisan benilai real maka

$\lim_{n\to\infty} \alpha f(x_n) + \beta f(y_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \beta \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ Dengan kelinearan dari f diperoleh

$= \alpha f(x) + \beta f(y)$

$\alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y)$, akhibatnya

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) = f(\alpha x + \beta y)$$

yang berarti $\alpha x_n + \beta y_n \xrightarrow{w} \alpha x + \beta y$.

Karena f sebarang maka teorema terbukti. ■

Teorema 4.1.6

Jika barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen lemah maka sebarang subbarisan dari $\{x_n\}$ konvergen lemah ke nilai yang sama.

Bukti

Diketahui barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen lemah misalkan ke x berarti

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$,untuk setiap $f \in X'$

Selanjutnya diambil sebarang subbarisan $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ maka untuk sebarang $f \in X'$ tersebut berlaku

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x) - \lim_{k\to\infty} f(x) = 0$$

Dengan kelinearan dari limit barisan dan kelinearan dari f diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k} - x) = f(0).$$

atau $\{x_{n_k} - x\} \xrightarrow{w} 0$

Karena persamaan terakhir ini berlaku untuk semua $f \in X'$ maka teorema terbukti. ■

4.2 Hubungan antara Barisan Konvergen Kuat dengan Barisan Konvergen Lemah

Telah dijelaskan mengenai definisi kekonvergenan kuat suatu barisan pada ruang bernorma maka konsep kekonvergenan lemah suatu barisan juga perlu diketahui keterkaitannya dengan barisan yang konvergen kuat. Berikut akan dibahas beberapa teorema yang menjelaskan hubungan antara barisan yang konvergen kuat dengan barisan yang konvergen lemah.

Teorema 4.2.1

Jika barisan $\{x_n\} \subset X$ konvergen kuat ke x maka barisan tersebut konvergen lemah ke x .

Bukti

Diketahui $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Karena $\{x_n\} \subset X$ dan kekonvergenan kuat barisan tersebut di X maka untuk setiap $f \in X'$ kekonvergenan barisan $\{x_n\} \subset X$ menjadi

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n - x) = f(0)$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x) = f(0)$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

yang berarti $x_n \xrightarrow{w} x$

Karena $f \in X'$ sebarang maka teorema terbukti. ■

Terema 4.2.1 di atas menunjukan bahwa kekonvergenan kuat suatu barisan selalu mengakhibatkan barisan tersebut konvergen lemah. Kebalikan dari teorema di atas tidak berlaku. Contoh berikut memperlihatkan pernyataan tersebut.

Contoh 4.2.2

Diberikan $X = C[0,1]$ dan barisan $\{x_n\} \subset X$ yaitu :

$$x_n(t) = \begin{cases} nt & , t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 2 - nt, & t \in \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & , t \in \left(\frac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa $x_n \xrightarrow{w} 0$ tetapi $x_n \nrightarrow 0$

Bukti

Andaikan $\{x_n\}$ tidak konvergen lemah ke nol. Berarti ada $f_1 \in X'$ sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) \neq f_1(x)$. Akhibatnya ada $\varepsilon_1 > 0$ sehingga untuk setiap bilangan asli n,

$$|f_1(x_n)| > \varepsilon_1$$

Dalam hal ini, misalkan $f_1(x_n) > \varepsilon_1$.

Diambil sebarang subbarisan $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sedemikian sehingga

$$n_{k+1} > 2n_k \quad \text{atau} \quad n_k < \frac{1}{2} n_{k+1} \quad \text{atau} \quad \frac{2}{n_{k+1}} < \frac{1}{n_k}$$

dengan $f_1(x_{n_k}) > \varepsilon_1$. Kemudian didefinisikan

$$y_k = \sum_{k=1}^{N} x_{n_k}(t) \text{ maka}$$

$$y_k = x_{n_1}(t) + x_{n_2}(t) + x_{n_3}(t) + \ldots + x_{n_N}(t)$$

$$= \begin{cases} n_1 t + n_2 t + \cdots + n_n t, & t \in \bigcap_{k=1}^{N} [0, \frac{1}{n_k}] \\ (2 - n_1 t) + (2 - n_2 t) + \cdots + (2 - n_N t), & t \in \bigcap_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{n_k}, \frac{2}{n_k}\right] \\ 0, & t \in \bigcap_{k=1}^{N} \left(\frac{2}{n_k}, 1\right] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (n_1 + n_2 + \cdots + n_N), t \in \left[0, \dfrac{1}{n_k}\right] \\ 0, t \in \left(\dfrac{2}{n_k}, 1\right] \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $y_k(t)$ naik pada interval $\left[0, \dfrac{1}{n_k}\right]$. Akhibatnya $y_k(t)$ mencapai maksimum di $t_0 = \dfrac{1}{n_k}$.

Sementara itu ,

$n_1 < \frac{1}{2} n_2$

$n_1 + n_2 < \frac{1}{2} n_2 + n_2 = \frac{3}{2} n_2$

$n_1 + n_2 + n_3 < \frac{3}{2} n_2 + n_3 < \frac{3}{4} n_3 + n_3 = \frac{7}{4} n_3$

...

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_N < \frac{2^N - 1}{2^{N-1}} n_N$

Dengan demikian ,

$$y_k(t_0) = x_{n_1}\left(\frac{1}{n_N}\right) + x_{n_2}\left(\frac{1}{n_N}\right) + \cdots + x_{n_K}\left(\frac{1}{n_N}\right)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_N).\frac{1}{n_N}$$

$$< \frac{2^N - 1}{2^{N-1}} n_N \cdot \frac{1}{n_N}$$

$$= \frac{2^N - 1}{2^{N-1}}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{N-1}} < 2$$

Diperoleh

$$y_k(t) = \sum_{k=1}^{N} x_{n_k}(t) < 2$$

Akhibatnya $|y_k| < 2$ untuk semua k. Selain itu diperoleh

$$f(y_k) = \sum_{k=1}^{N} f(x_{n_k}) > k\varepsilon_1$$

Karena ketaksamaan di atas berlaku untuk semua nilai k dan $|y_k| < 2$ maka f tidak terbatas. Hal ini kontradiksi karena f fungsional linear terbatas. Dengan demikian pengandaian salah. Jadi f haruslah konvergen lemah ke nol.

Kemudian dipilih $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$. Perhatikan bahwa untuk semua bilangan asli n berlaku $\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]}|x_n(t)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_2$. Hal ini menunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}$ tidak konergen kuat ke nol. Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa $\{x_n\}$ konvergen lemah ke nol tetapi tidak konvergen kuat ke nol. ■

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya maka dapat diperoleh beberapa simpulan sebagai berikut :

1. Diketahui barisan $\{x_n\} \subset X$ dan $x, y \in X$ yang memenuhi sifat berikut :

   $x_n \xrightarrow{w} x$ dan $x_n \xrightarrow{w} y$.

   Dengan mengambil sebarang fungsi f pada ruang dual X' maka diperoleh barisan fungsi $\{f(x_n)\}$ yang konvergen kuat ke $f(x)$ dan $f(y)$, untuk masing-masing x dan y tersebut diatas. Dengan kelinearan fungsi f maka diperoleh limit lemah x dan y berada pada satu titik yang sama. Dengan kata lain

   $x = y$.

   Sifat ini dinamakan sifat ketunggalan limit lemah.

2. Diketahui barisan $\{x_n\} \subset X$ dan $x \in X$ dengan sifat

   $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

   Jika diambil sebarang fungsi f pada ruang dual X' maka kekonvergenan barisan $\{x_n\} \subset X$ menjadi

   $\lim_{n\to\infty} f(x_n - x) = f(0)$.

   Dengan kelinearan fungsi f maka barisan fungsi $\{f(x_n)\}$ konvergen kuat ke $f(x)$ atau ditulis

   $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

   Yang menunjukan bahwa $x_n \xrightarrow{w} x$.

   Hal ini menunjukan bahwa setiap barisan yang konvergen kuat maka barisan itu konvergen lemah.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terimakasih ditujukan kepada Universitas Nusa Cendana Kupang yang sudah menjadi kampus kami untuk menimbah ilmu dan juga dosen dosen kami yang sudah memberikan ilmunya kepada kami.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. a-research.upi.edu/operator/upload/s_mat_0607564_chapter3.pdf

Budhi, Wono Setya.1995. *Aljabar Linear.* Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Debnath, Lokenath dan Piotr Mikusinski. 1998. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications.* Department of Mathematics University of Central Florida Orlando : Academic Press.

Gaskill, Herbert S. dan P.P Narayanaswami. 1998. *Element of Real Analysis.* New Jersey : Prentice Hall.

Gozali, Sumanang Muhtar. 2010. *Pengantar Analisis Fungsional.* Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung.

Karlsen, Kenneth H. 2006. *Notes on Weak Convergence.* (Diunduh dari http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4380/v06/Weakconvergence.pdf pada 12 April 2014).

Kronheimer,P.B. 2010. *Weak Convergence.* (Diunduh dari http://isiter.harvard.edu/fs/docs/icb.topic913185.files/Weak-Convergence.pdf pada 16 Agustus 2014).

Setiadji. 1983. *Aljabar Linear 1.* Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

Suryawan, Herry P. 2010. *Dasar – Dasar Teori Ruang Hilbert* .(Diunduh dari http://herryps.files.wordpress.com/2010/10/ruang-hilbert2.pdf pada 12 April 2014).

Tuwankotta, Johan Matheus. 2012. *Analisis Real.* Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Bandung.

William, Andre. 2010. *Analisis Matriks Representatif Transformasi Linear pada Ruang vektor.* Matematika-FST Universitas Nusa Cendana, Kupang.

Zaki Riyanto, M. 2008. *Pengantar Analisis Real 1.* Universitas Gajah Mada, Yogyakarta. (Diunduh dari http://zaki.math.web.id pada 12 April 2012).